Super (a, d)-H Total Decomposition of Graf Helm

Kholifatur Rosyidah, Dafik
CGANT-Universitas Jember
Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember
ifa_kholifatur10077@yahoo.co.id, d.dafik@gmail.com

Abstrak

Selimut dari G adalah $H = \{H_1, H_2, H_3, ..., H_k\}$ keluarga subgraf dari G dengan sifat setiap sisi di G termuat pada sekurang-kurangnya satu graf H_i untuk suatu $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Jika untuk setiap $i \in \{1, 2, ..., k\}$, H_i isomorfik dengan suatu subgraf H, maka H dikatakan selimut-H dari G. Selanjutnya, jika selimut-H dari G memiliki sifat yaitu setiap sisi G termuat dalam tepat satu graf H_i untuk suatu $i \in \{1, 2, ..., k\}$, maka selimut-H disebut dekomposisi-H. Dalam hal ini, G dikatakan memuat dekomposisi-H atau G terdekomposisi atas H. Sebuah graf $G(V, E)$ memiliki (a, d)-H total dekomposisi jika setiap sisi E merupakan sub graf dari G yang isomorfik dengan H. Dalam penelitian ini akan dikaji super (a, d)-H total dekomposisi dari graf helm.

Kata Kunci : *Dekomposisi, Graf helm, Subgraf, dan Super* (a, d)-H.

Pendahuluan

Teori graf adalah salah satu cabang dari matematika yang pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan Swiss yang bernama Leonard Euler pada tahun 1736, sebagai upaya menyelesaikan masalah jembatan Konigsberg yang tercatat dalam sejarah untuk pertama kali menggunakan graf. Seiring perkembangan jaman dan teknologi, teori graf banyak dijadikan model dalam memecahkan masalah yang ada di kehidupan [1]. Salah satu masalah yang berkaitan dengan graf yang telah dikaji adalah dekomposisi graf. Banyak permasalahan yang menggunakan penerapan dekomposisi graf seperti jaringan listrik, siklus suatu makhluk hidup dan berbagai permasalahan lainnya. [2], [4]

Selimut dari G adalah $H = \{H_1, H_2, H_3, ..., H_k\}$ keluarga subgraf dari G dengan sifat setiap sisi di G termuat pada sekurang-kurangnya satu graf H_i untuk suatu $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Jika untuk setiap $i \in \{1, 2, ..., k\}$, H_i isomorfik dengan suatu subgraf H, maka H dikatakan selimut-H dari G. Selanjutnya, jika selimut-H dari G memiliki sifat yaitu setiap sisi G termuat dalam tepat satu graf H_i untuk suatu $i \in \{1, 2, ..., k\}$, maka selimut-H disebut dekomposisi-H. Dalam hal ini, G dikatakan memuat dekomposisi-H atau G terdekomposisi atas H [3]. Super (a, d)-H total dekomposisi diperoleh dengan melabeli titik sebuah graf, mencari bobot sisi super (a, d)-H [8], melebeli sisi graf H [12] [14], dan kemudian mencari bobot total sisi super (a, d)-H antimagic total dekomposisi graf H.

Artikel ini akan menjelaskan tentang dekomposisi dari graf Helm. Akan ditentukan kardinalitas dan teorema-teorema tentang super antimagic total dekomposisi. Dari uraian tersebut maka penulis menulis judul artikel "Super (a, d)-H Total Dekomposisi dari Graf Helm".

Kardinalitas Graf Helm

Misalkan H_n= $(V(H_n), E(H_n))$ adalah graf berhingga dengan $|V(H_n)| = p_G$ dan $E(H_n) = q_G$. Pelabelan pada H_n didefinisikan sebagai suatu fungsi yang memetakan elemen-elemen H_n ke suatu subhimpunan bilangan bulat positif. Daerah definisi dari fungsi ini dapat berupa himpunan titik, himpunan sisi, atau gabungan himpunan titik. Pelabelan tersebut berturut-turut disebut pelabelan titik, pelabelan sisi, atau pelabelan total. Selanjutnya, jumlah semua label yang berkaitan dengan satu elemen pada suatu graf dikatakan bobot dari elemen tersebut. [9], [10], [11], dan [13]

Berdasarkan uraian diatas, Graf helm adalah graf yang memiliki $V(H_n) = \{P\} \cup \{x_i, y_i, 1 \leq i \leq n\}$, $E(H_n) = \{Px_i, x_ix_{i+1}, x_iy_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_nx_1\}$, $p_G = |V|$=$2n + 1$, $q_G = |E|$=$3n$, $p_{H_n} = 4$, dan $q_{H_n} = 3$.

Lemma 1 *[4] Jika graf $H_n(V, E)$ adalah super $(a, d)-S_3$ antimagic total dekomposisi maka*

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1}$$

untuk $s = |H_i|$, $p_G = |V|$, $q_G = |E|$, $p_H = |V'|$, $q_H = |E'|$

Proof.

$$(s-1)d \leq p_Hp_G - \tfrac{p_H-1}{2}p_H + q_Hp_G + q_Hq_G - \tfrac{q_H-1}{2}q_H - a$$
$$(s-1)d \leq p_Hp_G - \tfrac{p_H-1}{2}p_H + q_Hp_G + q_Hq_G - \tfrac{q_H-1}{2}q_H - (\tfrac{p_H}{2} + \tfrac{p_H^2}{2} + q_Hp_G + \tfrac{q_H}{2} + \tfrac{q_H^2}{2})$$
$$(s-1)d = p_Hp_G - \tfrac{p_H^2}{2} + \tfrac{p_H}{2} + q_Hq_G - \tfrac{q_H^2}{2} + \tfrac{q_H}{2} - (\tfrac{p_H}{2} + \tfrac{p_H^2}{2} + \tfrac{q_H}{2} + \tfrac{q_H^2}{2})$$
$$(s-1)d = p_Hp_G + q_Hq_G - p_H^2 - q_H^2$$
$$(s-1)d = p_Hp_G - p_H^2 + q_Hq_G - q_H^2$$
$$(s-1)d = (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H$$
$$d \leq \tfrac{(p_G-p_H)p_H+(q_G-q_H)q_H}{s-1}$$

Jadi, untuk $s = |H_i|$, $p_G = |V|$, $q_G = |E|$, $p_H = |V'|$, $q_H = |E'|$ terbukti bahwa $d \leq \frac{(p_G-p_H)p_H+(q_G-q_H)q_H}{s-1}$

Hasil Penelitian

Metode penelitian yang digunakan yaitu menentukan kardinalitas dari garf Helm, menentukan d untuk dekomposisi dari S_3, menentukan fungsi titik, fungsi bobot dekomposisi, fungsi sisi, dan fungsi bobot total dekomposisi. Berikut akan diuraikan hasil dari penelitian berupa teorema-teorema beserta pembuktiannya terkait dekomposisi graf untuk graf Helm.

$\diamond$ **Teorema 0.1** *Graf helm H_n memiliki super $(\frac{25n+11}{2},1)$-S_3 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 3$.*

Proof. Labeli titik graf Helm H_n dengan fungsi f_1 yang didefinikan sebagai berikut:

$$f_1(P) = 1$$

$$f_1(x_i) = \begin{cases} \frac{n+i+2}{2}; & 1 \leq i \leq n, \text{untuk}\, i \in ganjil \\ \frac{i+1}{2}; & 1 \leq i \leq n, \text{untuk}\, i \in genap \end{cases}$$

$$f_1(y_i) = n + i + 1; 1 \leq i \leq n$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_1 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_1 : V(H_n) \to \{1, 2, \ldots, 2n + 1\}$. Misal w_{f_1} adalah bobot sisi super $(\frac{25n+11}{2},1)$-S_3 antimagic total dekomposisi graf helm H_n untuk $n \geq 3$, maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$w_{f_1} = \frac{3n + 4i + 9}{2}; 1 \leq i \leq n$$

Kemudian labeli sisi graf Helm H_n dengan fungsi f_1 yang didefinikan sebagai berikut:

$$f_1(Px_i) = 3n + 2 - i; 1 \leq i \leq n$$

$$f_1(x_i x_{i+1}) = 3n + i + 1; 1 \leq i \leq n$$

$$f_1(x_n x_1) = 4n + 1$$

dan

$$f_1(x_i y_i) = 5n - i + 2; 1 \leq i \leq n$$

Misal W_{f_1} adalah bobot total sisi super $(\frac{25n+11}{2},1)$-S_3 antimagic total dekomposisi graf helm H_n untuk $n \geq 3$, maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$W_{f_1} = \frac{25n + 2i + 9}{2}; 1 \leq i \leq n$$

Dengan mudah dapat diuraikan untuk masing-masing i pada interval $1 \leq i \leq n$ adalah $W_{f_1} = \{\frac{25n+11}{2}, \frac{25n+13}{2}, \ldots, \frac{27n+9}{2}\}$. Sehingga terbukti bahwa Graf helm H_n memiliki super $(\frac{25n+11}{2},1)$-S_3 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 3$.

$\diamond$ **Teorema 0.2** *Graf helm H_n memiliki super $(\frac{29n+17}{2},3)$-S_3 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 3$.*

Bukti. Labeli titik graf Helm H_n dengn fungsi f_2 yang didefinikan sebagai berikut:

$$f_2(P) = 1$$

$$f_2(x_i) = \begin{cases} \frac{n+i+2}{2}; & 1 \le i \le n, \text{untuk}\, i \in ganjil \\ \frac{i+1}{2}; & 1 \le i \le n, \text{untuk}\, i \in genap \end{cases}$$

$$f_2(y_i) = n + i + 1; 1 \le i \le n$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_2 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_2 : V(H_n) \to \{1, 2, \ldots, 2n + 1\}$. Misal w_{f_2} adalah bobot sisi super $(\frac{29n+17}{2}, 3)$-S_3 antimagic total dekomposisi graf helm H_n untuk $n \ge 3$, maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$w_{f_2} = \frac{3n + 4i + 9}{2}; 1 \le i \le n$$

Kemudian labeli sisi graf Helm H_n dengan fungsi f_2 yang didefinikan sebagai berikut:

$$f_2(Px_i) = 2n + i + 1; 1 \le i \le n$$

$$f_2(x_n x_1) = 3n + 2; 1 \le i \le n$$

$$f_2(x_i x_{i+1}) = 4n - i + 2$$

dan

$$f_2(x_i y_i) = 4n + i + 1; 1 \le i \le n$$

Misal W_{f_2} adalah bobot total sisi super $(\frac{29n+17}{2}, 3)$-S_3 antimagic total dekomposisi graf helm H_n untuk $n \ge 3$, maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$W_{f_2} = \frac{23n + 6i + 17}{2}; 1 \le i \le n$$

Dengan mudah dapat diuraikan untuk masing-masing i pada interval $1 \le i \le n$ adalah $W_{f_2} = \{\frac{23n+23}{2}, \frac{23n+29}{2}, \ldots, \frac{29n+17}{2}\}$. Sehingga terbukti bahwa graf helm H_n memiliki super $(\frac{29n+17}{2}, 3)$-S_3 antimagic total dekomposisi untuk $n \ge 3$.

◇ **Teorema 0.3** *Graf helm H_n memiliki super $(\frac{31n+15}{2}, 5)$-S_3 antimagic total dekomposisi untuk $n \ge 3$.*

Bukti. Labeli titik graf Helm H_n dengan fungsi f_3 yang didefinikan sebagai berikut:

$$f_3(P) = 1$$

$$f_3(x_i) = \begin{cases} \frac{n+i+2}{2}; & 1 \le i \le n, \text{untuk}\, i \in ganjil \\ \frac{i+1}{2}; & 1 \le i \le n, \text{untuk}\, i \in genap \end{cases}$$

$$f_3(y_i) = n + i + 1; 1 \leq i \leq n$$

Dengan mudah dapat dipahami bahwa f_3 adalah merupakan fungsi bijektif yang memetakan $f_3 : V(H_n) \rightarrow \{1, 2, \ldots, 2n + 1\}$. Misal w_{f_3} adalah bobot sisi super $(\frac{31n+15}{2}, 5)$-S_3 antimagic total dekomposisi graf helm H_n untuk $n \geq 3$, maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$w_{f_3} = \frac{3n + 4i + 9}{2}; 1 \leq i \leq n$$

Kemudian labeli sisi graf Helm H_n dengan fungsi f_3 yang didefinikan sebagai berikut:

$$f_3(Px_i) = 2n + i + 1; 1 \leq i \leq n$$

$$f_3(x_i x_{i+1}) = 3n + i + 1; 1 \leq i \leq n$$

$$f_3(x_n x_1) = 4n + 1$$

dan

$$f_3(x_i y_i) = 4n + i + 1; 1 \leq i \leq n$$

Misal W_{f_3} adalah bobot total sisi super $(\frac{31n+15}{2}, 5)$-S_3 antimagic total dekomposisi graf helm H_n untuk $n \geq 3$, maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$W_{f_3} = \frac{21n + 10i + 15}{2}; 1 \leq i \leq n$$

Dengan mudah dapat diuraikan untuk masing-masing i pada interval $1 \leq i \leq n$ adalah $W_{f_3} = \{\frac{21n+25}{2}, \frac{21n+35}{2}, \ldots, \frac{31n+15}{2}\}$. Sehingga terbukti bahwa Graf helm H_n memiliki super $(\frac{31n+15}{2}, 5)$-S_3 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 3$.

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian diatas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa:

- Graf helm H_n memiliki super $(\frac{25n+11}{2}, 1)$-S_3 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 3$.
- Graf helm H_n memiliki super $(\frac{29n+17}{2}, 3)$-S_3 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 3$.
- Graf helm H_n memiliki super $(\frac{31n+15}{2}, 5)$-S_3 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 3$.

References

[1] Nur Rahmawati, Dekomposisi graf sikel, graf roda, graf gir dan graf persahabatan, Skripsi, Not Publicated, Universitas Negeri Surabaya, 2014.

[2] Erni Novianti, Dekomposisi Cyclic dari Graf Lengkap, Graf Graceful, dan Aplikasinya dalam Telecommand Codes, Artikel, 2012.

[3] A.E. Hader,A. N. M Salman, An A_M-Supermagic Decomposition Of The Cartesian Product Of a Path and Sun, Artikel, 2013

[4] Dafik, Structural Properties and Labeling of Graphs, University of Ballarat, 2007.

[5] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, On super (a, d)-edge antimagic total labeling of disconnected graphs, *Discrete Math.*, **309** (2009), 4909-4915.

[6] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, Super edge-antimagic total labelings of $mK_{n,n,n}$, *Ars Combinatoria* , **101** (2011), 97-107

[7] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, Antimagic total labeling of disjoint union of complete s-partite graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, **65** (2008), 41–49

[8] M. Baca, Y. Lin, M. Miller and M.Z. Youssef, Edge-antimagic graphs, Discrete Math, 2007.

[9] Nur Inayah, Pelabelan $(a, d) - H$-Anti Ajaib Pada Beberapa Kelas Graf, Disertasi, Not Publicated, Institut Teknologi Bandung, 2013.

[10] W.D. Wallis, E.T. Baskoro, M. Miller and Slamin, Edge-magic total labelings, Austral, J. Combin., 2000.

[11] Joseph A. Gallian, A Dynamic Survey of Graph Labeling, University of Minnesota, 1997.

[12] Reni U., Pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic pada graf UFO, Thesis, Not Publicated, University of Jember, 2013.

[13] Dafik, M. Miller, J.Ryan and M.Baca, On super (a,d)-edge antimagic total labeling of disconnected graphs, Discrite Math, (To appear).

[14] Ira A., Pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf tangga, Thesis, Not Publicated, University of jember, 2011.